ひなみ塾「国語と数学」　図形③～立体

中学レベルの図形の全体像～大きく分けて、3 つのことを学びます。

(1) 直線で囲まれた図形
(2) 円
(3) 立体

立体の全体像～以下の 7 つを押さえれば、この項目については中学レベルの数学全てをカバーしたことになります。

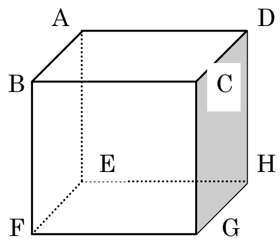
(1) 空間内の位置関係
(2) 様々な立体
(3) 立体の表面積と体積
(4) 線分の長さ
(5) 立体の切断
(6) 球と平面の交わり
(7) 内接球
(8) 外接球

空間内の位置関係

1. 平行、垂直については、2 次元の平面（縦×横）で学んだことを 3 次元の空間（縦×横×高さ）にそのままあてはめることができます。
   (ア) 平行
   ① 2 本の直線をどこまで伸ばしても交わらない場合、これらの直線は平行であるといいます。
   1. より厳密に定義すると、2 直線が平行とは、「2 直線が同一平面上にあって共有点を持たないこと」です。
   ② これは、直線と平面、平面と平面についても同様です。
   ③ ただし、直線と直線については注意が必要で、「平行ではないけれども交わらない」ということがあり得ます。このとき、これらの 2 直線は「ねじれの位置」にあるといいます。例えば、基本例題の立方体における辺 EF と辺 BC はねじれの位置にあります。
   1. 平行の定義と関連させると、ねじれの位置にある 2 直線は、交わらないけれども、同一平面上にはありません。
   (イ) 垂直
   ① 2 本の直線が交わっており、交点における隣り合う角の大きさが等しいとき、これらの直線は垂直であるといいます。
   ② 2 つの平面が交わっており、交わった部分（直線）における隣り合う角の大きさが等しいとき、これらの平面は垂直であるといいます。
   ③ 直線と平面の場合には、これを拡張し、「直線 l と平面 P において、これらの交点を通る、平面 P 上の任意の直線と直線 l が垂直である」とき、直線 l と平面 P は垂直であると定義します。

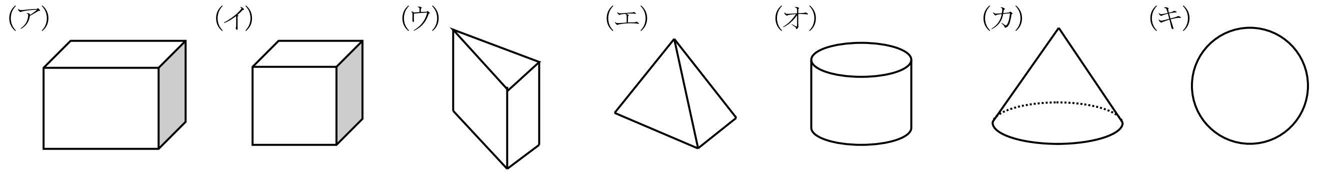
☆☆☆　基本例題　☆☆☆
～これだけは必ず全てできるようになりましょう～

1. 右の立方体について、以下の問いに答えましょう。
   (ア) 辺ABと平行な辺を全て挙げましょう。
   (イ) 辺ABと垂直な辺を全て挙げましょう。
   (ウ) 辺ABとねじれの位置にある辺を全て挙げましょう。
   (エ) 辺ABと平行な面を全て挙げましょう。
   (オ) 辺ABと垂直な面を全て挙げましょう。
   (カ) 面ABCDと平行な面を全て挙げましょう。
   (キ) 面ABCDと垂直な面を全て挙げましょう。



様々な立体

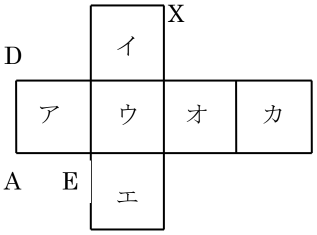
1. 多角柱・円柱
（ア） すべての面が長方形である六面体を「直方体」といいます。
（イ） 直方体の中で、全ての面が正方形のものを「立方体」といいます。
（ウ） 合同なふたつの多角形を底面とする筒のような形の立体を「角柱」といいます。直方体や立方体は四角柱の一種です。（下の図の（ウ）は三角柱です）
（エ） 多角形を底面とし、それとある一点とを結んでできる立体を「角すい」といいます。（下の図の（エ）は三角すいです）
（オ） 合同なふたつの円を底面とする筒のような形の立体を「円柱」といいます。
（カ） 円を底面とし、それとある一点とを結んでできる立体を「円すい」といいます。
（キ） ある点から等しい距離の点を集めた立体を「球」といい、その点を球の「中心」といいます。

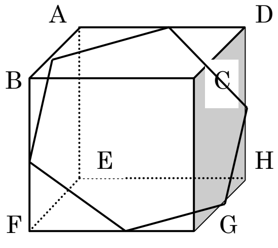


2. 見取図、展開図
（ア） 立体の全体像がわかるように描いた図のことを「見取図」といいます。
（イ） 立体を切り開いて平らに伸ばした図のことを「展開図」といいます。
（ウ） 立方体の見取図と展開図の間には以下の関係があります。
① 展開図上で 90° となる頂点どうし及びその隣の頂点どうしは必ず重なる。
② 見取図で平行な辺どうしは展開図でも平行になる。

☆☆☆ 基本例題 ☆☆☆
～これだけは必ず全てできるようになりましょう～

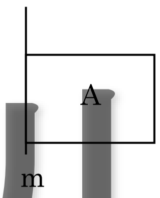
1. 下の図は、立方体の展開図、見取図です。
（ア） 展開図を組み立てたときに、面オと平行になる面はどれですか？
（イ） 展開図を組み立てたときに、面ウと垂直になる面はどれですか？
（ウ） ☆ 展開図における点Xは、見取図におけるどの点となりますか？
（エ） ☆☆ 立方体の面の上に引かれている直線は、各辺の中点を結んだ正六角形です。これらの直線全てを展開図上に描き入れましょう。





立体の表面積と体積

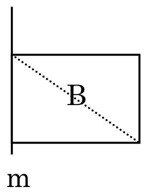
1. 表面積～立体の全ての面の面積の和を「表面積」といいます。
   (ア) 多角柱： 底面積×2＋側面積（底面の周の長さ×側面の高さ）
   (イ) 円柱： 底面積（πr^2）×2＋側面積（底面の円周の長さ×側面の高さ） （※ r は底面の円の半径）
   (ウ) 球： $4\pi r^2$ （※ r は球の半径）
2. 体積
   (ア) 多角柱： 底面積×（側面の）高さ ＝Sh
   (イ) 円柱： 底面積×（側面の）高さ ＝$\pi r^2 h$ （※ r は底面の円の半径）
   (ウ) 角すい： $\frac{1}{3}$×底面積×（側面の）高さ ＝ $\frac{1}{3}$Sh
   (エ) 円すい： $\frac{1}{3}$×底面積×（側面の）高さ ＝ $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ （※ r は底面の円の半径）
   (オ) 球： $\frac{4}{3}\pi r^3$ （※ r は球の半径）
3. 相似比・面積比・体積比
   (ア) 形が同じ図形は「相似」であるといいます。
      ① これに対して、形も大きさも同じ図形は「合同」であるといいます。
   (イ) 相似な図形において、対応する辺の長さの比を「相似比」といいます。
   (ウ) 相似な図形においては、面積比は「相似比の 2 乗」（立体の表面積比も同様です）、体積比は「相似比の 3 乗」です。
4. 回転体
   (ア) ある軸を中心に図形を回転させると、立体ができます。
   (イ) 例えば、右の図で、長方形 A を、軸 m を中心に回転させると、円柱ができます。
   (ウ) この立体の体積は、基本通りに円柱の公式に当てはめれば求めることができます。



☆☆☆ 基本例題 ☆☆☆
～これだけは必ず全てできるようになりましょう～

※全ての問題において、円周率はπとします。

1. 以下の立体の表面積と体積を求めましょう。
   (ア) 縦2cm、横4cm、高さ6cmの直方体。
   (イ) 一辺10cmの立方体。
   (ウ) 底面の半径4cm、高さ10cmの円柱。
   (エ) ☆ 半径3cmの球。
2. 以下の立体の体積を求めましょう。
   (ア) ☆ 底面の縦6cm、横8cmで、高さ10cmの四角すい。
   (イ) ☆☆ 底面の半径4cmで、高さ9cmの円すい。
3. 球Aと球Bは相似比が1:5です。このとき、これらの図形の表面積比と体積比をそれぞれ求めましょう。
4. ☆ 右の図において、長方形Bは底辺4cm, 高さ3cmです。軸mを中心としてこの長方形を回転させたときにできる図形の表面積と体積を求めましょう。
5. ☆☆ 右の図において、長方形Bに、点線のように対角線を引き、2つの直角三角形に分割します。軸mを中心として、2つの直角三角形のうち左下の方を回転させたときにできる図形の体積を求めましょう。



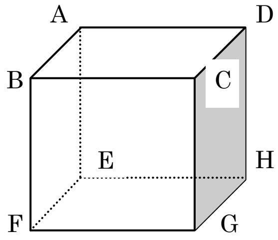
線分の長さ

1. 空間内の線分の長さ
   (ア) 平面内の線分の長さは、三平方の定理で求めることができました。

   点 P(a, b)と点 Q(x, y)を結ぶ線分の長さは、$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$

   (イ) 同様に、空間内の線分の長さも、三平方の定理で求めることができます。

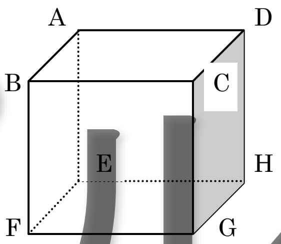
   点 P(a, b, c)と点 Q(x, y, z)を結ぶ線分の長さは、$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$



   (ウ) 上の(イ)から、例えば立方体の対角線 AG を求めるには、$\sqrt{縦^2+横^2+高さ^2}$とすればよいことが分かります。

2. 垂線の長さ
   (ア) 立体のある面にある頂点からおろした垂線の長さを求める場合は、「底面積と体積を求める→体積の公式から『高さ＝垂線の長さ』を求める」という流れで行います。
3. 最短距離
   (ア) 立体上のある点から別な点への最短距離を求めるときには、展開図にすると考えやすくなります。なぜなら、展開図上でこれら 2 つの点を結ぶ直線が最短距離となるからです。

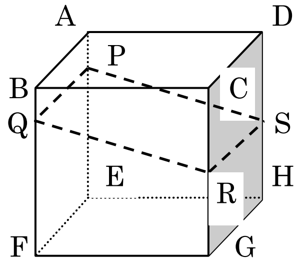
☆☆☆　基本例題　☆☆☆
～これだけは必ず全てできるようになりましょう～



1. ☆　一辺が2cmの立方体の対角線AGの長さを求めましょう。
2. ☆☆　縦2cm、横3cm、高さ4cmの直方体の対角線AGの長さを求めましょう。
3. ☆☆　一辺が2cmの立方体の頂点Bから△ACFにおろした垂線の長さを求めましょう。
4. 頂点Bから頂点Eまで、辺CG、辺DHを通るようにひもをかけます。
   どのようにひもをかければ、最も短くなりますか。

立体の切断

1. 立体を切断すると、断面ができます。以下をおぼえておけば、断面の形を見抜いたり、面積を求めたりすることが、より簡単にできるようになります。
   (ア) 同じ平面の上の点は、直線で結べます。
   例) 点 P と点 Q、点 R と点 S　など
   (イ) 平行な面どうしの切り口は、平行になります。
   例) PQ と SR、PS と QR



2. 四角柱を右の図のように PQRS で切断した場合、以下のことが成り立ちます。
   (ア) 切り口は平行四辺形になります。
   (イ) PE+RG=QF+SH
   (ウ) 立体 PQRS-EFGH の体積=底面積 EFGH$\times\frac{PE+RG+QF+SH}{4}$

☆☆☆　基本例題　☆☆☆
～これだけは必ず全てできるようになりましょう～

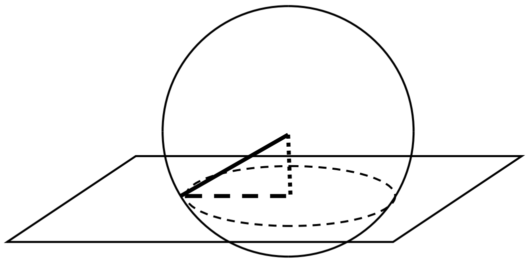
※　この項の例題は、全て、右上の立方体の図を参照してください
1. 1 辺 12cm の立方体 ABCD-EFGH を、平面 PQRS で切断します。PE=10cm, QF=9cm, RG=6cm のとき、SH の長さは何 cm になりますか。また、平面 PQRS の下側の立体の体積を求めましょう。
2. ☆　1 辺 12cm の立方体 ABCD-EFGH を、頂点 A, C, F を通る平面で切断します。断面の形はどんな図形になりますか。また、断面の面積を求めましょう。
3. ☆☆　1 辺 12cm の立方体 ABCD-EFGH を、頂点 B, D, FG の中点, GH の中点を通る平面で切断します。断面の形はどんな図形になりますか。また、断面の面積を求めましょう。

球と平面の交わり

1. 球と平面が交わると、断面が円になります。
2. この球と円の半径が与えられれば、球の中心から平面までの距離 d を、三平方の定理を使って求めることができます。

$d^2 + r^2 = R^2$（よって、$r = \sqrt{R^2 - r^2}$）

※r=円の半径、R=球の半径
※右の図では、d が …… 、r が ‒ ‒ 、R が―― です。



☆☆☆ 基本例題 ☆☆☆
～これだけは必ず全てできるようになりましょう～

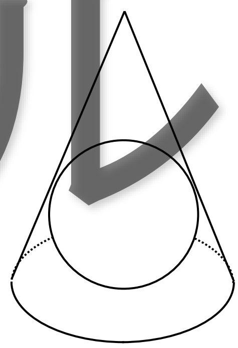
1. 球Oと平面pが交わり、円O'ができています。
   (ア) 球の半径が4cm、円の半径が2cmのとき、球の中心から平面までの距離を求めましょう。
   (イ) ☆ 球の半径が5cm、球の中心から平面までの距離が3cmのとき、円の半径を求めましょう。
   (ウ) ☆☆ 円の半径が6cm、球の中心から平面までの距離が8cmのとき、球の半径を求めましょう。

内接球

1. 平面図形の「円」で学んだ「内接円」の考え方を使えば、立体に内接する「内接球」の半径を求めることができます。
2. 逆に、内接球の半径が与えられれば、その立体の辺の長さなどが分かる場合もあるということです。
3. 立体のままでは計算しにくいので、ほとんどの場合、内接球の中心を通るように立体を切断して問題を解きます。（そうすれば、平面図形として解けるからです）
4. 使う公式は、主に、(1) 三平方の定理、(2) 内接円の公式 の 2 つです。

(ア) 三平方の定理: $a^2 + b^2 = c^2$（よって、$c = \sqrt{a^2 + b^2}$）

(イ) 内接円の公式: △ABC の面積＝$\frac{1}{2}$r (AB+BC+CA) ※r=内接円の半径

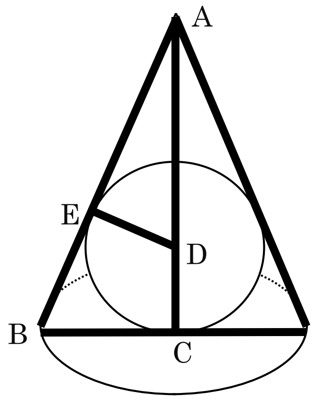


☆☆☆ 基本例題 ☆☆☆
～これだけは必ず全てできるようになりましょう～

1. ☆ 底面の半径が3cm、母線（円すいの頂点から底面の円周に引いた直線）の長さが5cmの円すいに球が内接しています。このとき、球の半径を求めましょう。
   - 右図のように断面（太線）をとると、__________三角形になる。
   - △ABCと△__________は相似なので、対応する辺の長さの比が等しい。

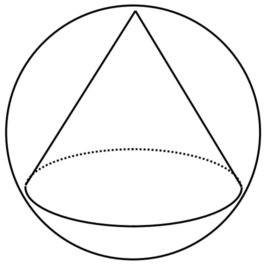
     よって、AB : BC（5 : 3） ＝ 辺__________ : 辺__________ （ア）
   - また、△ABCの3つの辺において、三平方の定理より、__________＝______ （イ）
   - DEとDCが内接円の半径なので等しいことと、AC＝AD＋DC であることに注意して、

     （ア）（イ）を連立方程式として解くと、DE ＝ DC ＝ 内接円の半径 ＝ __________



2. ☆☆ 底面の半径が5cmの円すいに半径$\frac{10}{3}$cmの球が内接しています。このとき、円すいの母線の長さを求めましょう。

外接球

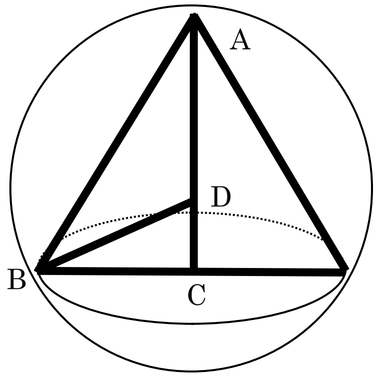


1. 内接球の場合と同様に、立体に外接する「外接球」の半径を求めることもできます。
2. この場合も、やはり、外接球の中心を通るように立体を切断して解くのがポイントです。
3. 使う公式は、主に、三平方の定理です。

☆☆☆ 基本例題 ☆☆☆

～これだけは必ず全てできるようになりましょう～

1. ☆☆ 底面の半径が2cm、母線（円すいの頂点から底面の円周に引いた直線）の長さが6cmの円すいに球が外接しています。このとき、球の半径を求めましょう。



- 右図のように断面（太線）をとると、__________三角形になる。
- △ABCの3つの辺において、三平方の定理より、____________＝______ （ア）
- 与えられた条件より、AB＝ __________ , BC＝ __________ なので、

  AC＝AD＋DC＝ __________ となることが分かる。（イ）
- また、△BCDの3つの辺において、三平方の定理より、____________＝______ （ウ）
- ADとBDが外接円の半径なので等しいことと（イ）に注意して、

  （ウ）を解くと、BD ＝ 外接円の半径 ＝ __________

2. ☆☆ 底面の半径が3cmの円すいに半径5cmの球が外接しています。このとき、円すいの母線の長さを求めましょう。